GAZDASÁG ÉS PÉNZÜGY • 7. ÉVF. 2. SZ. • 2020. JÚN. • DOI: 10.33926/GP.2020.2.1

KEYNES ÉS A VALÓSZÍNŰSÉG ÉRTELMEZÉSE VS. A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS FELHASZNÁLÁSA AZ OPCIÓÁRAZÁSBAN

Száz János[1]

A jelen cikk a folyóirat előző számában megjelent *Bélyácz–Daubner* (2020) tanulmányra reflektál, amely azt vizsgálta, maradt-e máig tartó hatása Keynes gondolatainak, hogy miként is kell értelmezni a valószínűség fogalmát az üzleti életben és a közgazdasági életben. Az idézett tanulmányt kiegészítve, e cikk arra hívja fel a figyelmet, hogy a szokásos frekvencionalista értelmezésen és a korlátozott tudásból fakadó bizonytalanságon túl a modern pénzügyekben, a konzisztens árazás kritériumait megfogalmazó feltételekben megjelenik egy olyan értelmezés is, amely nem a múltbeli statisztikai gyakoriságokhoz kötődik, és nem is a befektetők bizonytalan várakozásaihoz, hanem egyszerűen a lehetséges kimenetek konzekvens súlyozásának követelményét fogalmazza meg a valószínűségszámítás eszköztárával (martingálárazás). Figyelemre méltó, hogy egymástól jelentősen eltérő súlyozásokat is választhatunk a helyes relatív árazáshoz.

JEL-kódok: D84, D85

Kulcsszavak: opcióárazás, bizonytalanság, valószínűség, előreláthatóság, Keynes, Arrow, Debreu, konzisztens árazás

Manapság, a „*big data*" korában nemcsak az üzleti életben hiszik egyre komolyabban és egyre többen, hogy majdnem minden fontos adatot összegyűjtöttünk a világról az egyre nagyobb és egyre gyorsabb számítógépeknek és a mindenhol ott lévő térfigyelő kameráknak köszönhetően, hanem az egyetemi oktatásban is „*jövőformáló szerepet*" szánnak a hatalmas tömegű adat elemzésének. Nem kétséges, hogy sok területen új perspektívát nyitnak ezek az eszközök. Sok jól és célirányosan képzett statisztikus kell majd.

De vajon tudunk-e lényegesen többet a tíz év múlva várható részvényárfolyamokról az immár milliszekundumossá gyorsult részvény- és devizakereskedés révén? Lehet-e egyáltalán hosszú távra előre jelezni az árfolyamokat? Keynes elvi válasza az árfolyamok hosszú távú előrejelezhetőségére határozott *nem* volt. Igaz, ez még

1 *Száz János* egyetemi tanár, professzor, Budapesti Corvinus Egyetem. E-mail: janos.szaz@uni-corvinus.hu.

jóval a big data előtt történt, de nehezen hihető, hogy a napon belüli gyakoribb kereskedés jobban magyarázná az árfolyamok hosszú távú változásának trendjét.[2] E rövidke cikk e két kérdésből kiindulva reflektál Bélyácz Ivánnak Daubner Katalinnal közösen írt legújabb tanulmányára (BD)[3], illetve Daubner Katalin írására (DK).[4]

Fogalmazzuk meg más formában is az előző kérdéspárt! Tudhatja-e egy bank, hogy törlesztik-e azt a hitelt, amelyet nyújtott? Tagadhatatlanul fontos kérdés. A bizonytalanság a dolgok természetében rejtőzik, vagy csak a saját tudásunk korlátosságából fakad? Ezeknek a kérdéseknek fut neki újból a BD-tanulmány, hasonlóan Bélyácz Iván 2011-es cikkéhez (BI11)[5].

A (BI11) cikk egy vitát indított el akkoriban e lap elődjének hasábjain.[6] Ezen írások közös vonása: arra az elvi jellegű kérdésre kerestek választ, hogy miként is kell értelmezni a valószínűség fogalmát az üzleti életben és a közgazdaságtanban, ezen belül is a pénzügyi piacok világában.

Miért érdemes újra feltenni a kérdést közel egy évtized után? Mi haszna az olvasónak ilyesmivel bajlódnia rohanó világunkban? Előbb az utóbbi kérdésre válaszolva: talán épp azért, mert nemcsak a főiskolákon, de a gazdasági jellegű egyetemeken is elsősorban a válaszokra, a kiszámítási módokra, a statisztikai szoftverek egyes outputjainak a bemutatására jut csak idő.

Néha azonban meg kellene állni, és feltenni a kérdést, hogy mi is az az 55, ha a képernyőn ez a szám villog éppen. Márpedig a bankárok, brókerek képernyőin elég sok szám villódzik.

Kevés leendő pénzügyesnek mondják el az iskolapadokban, hogy a leggyakrabban használt pénzügyi alapszámítás, a jelenérték-számítás mögött komoly elmé-

2 Ugyanakkor nem árt felidézni, hogy Keynes nem csupán kiemelkedő elméleti közgazdász volt, hanem a reggelenkénti telefonos adásvételei révén megsokszorozta a King's College vagyonát. Nem beszélve a saját vagyonáról. Tehát nagyon is tudta, hogy mi jár a befektetők fejében, akiknek az adásvételei határozzák meg közvetlenül az árfolyamok alakulását. A közgazdasági faktorok nem közvetlenül vagy egyenleteken keresztül, hanem csakis kizárólag a piaci szereplők döntésein keresztül hatnak az árakra.

3 Bélyácz Iván – Daubner Katalin (2020): Logikai valószínűség, bizonytalanság, beruházási döntések. Volt-e hatása Keynes logikai valószínűségi elméletének a közgazdasági gondolkodásra? *Gazdaság és Pénzügy* 7(1), 2–47.

4 Daubner Katalin (2019): A valószínűség fogalmának kétarcúsága. *Tudományos Mozaik* 17. kötet. Budapest: Tomori Pál Főiskola, 83–98.

5 Bélyácz Iván (2011) : Kockázat, bizonytalanság, valószínűség. *Hitelintézeti Szemle* 10(4), 289–313.

6 Medvegyev Péter: Néhány megjegyzés a kockázat, bizonytalanság, valószínűség kérdéséhez. *Hitelintézeti Szemle* 10(4), 314–324.; Száz János: Valószínűség, esély, relatív súlyok. Opciók és reálopciók. *Hitelintézeti Szemle* 10(4), 336–348.

leti háttér húzódik meg, méghozzá a mikroökonómiából ismert intertemporális helyettesítés gondolatmenete. De ez a fejezet már többnyire kimarad.

Lehet-e értelmes választ adni arra kérdésre, hogy „mekkora a valószínűsége egy adott hitel visszafizetésének”? Vagy csak azt lehet mondani, hogy „várhatóan az adott *fajtájú* hitelek 68%-át fizetik vissza”? Esetleg pusztán annyit, hogy „valószínűbb, hogy visszafizetik a hiteleket, mint hogy nem”.[7]

Hangsúlyozzuk, hogy nem az a kérdés, vajon a 68% elég pontos-e.[8] Az a kérdés, hogy egyáltalán van-e objektív mértéke minden eseménynek (amit 0 és 1 közé normálva valószínűségnek szokás nevezni), amint a testeknek van súlya és térfogata. Vagy csak annyi mondható, hogy a Liverpool esélyesebb, mint a Fradi; a törlesztés valószínűbb, mint a törlesztés elmaradása.

Determinisztikusak-e a világ eseményei, és bizonyos differenciálegyenletek szerint működik-e a világ egésze[9], vagy valószínűségi változókkal írhatók le az elemi részecskéken belül lezajló folyamatok? Ez utóbbi ellen berzenkedett is *Einstein*, mondván: „*Isten nem játszik kockajátékot.*”

Daubner Katalin igen informatív tanulmánya arról, hogy különböző korokban mit is gondoltak a valószínűség fogalmának mibenlétéről és alkalmazhatóságának köréről a nagy gondolkodók, minden olvasót elgondolkodtat: vajon a valószínűségszámítás a kártyajátékokra, kockadobás-sorozatokra érvényes-e csupán, vagy megalapozottan alkalmazható például a hitelezési döntések során is? Bélyácz Ivánnal közös tanulmányuk fókusza szűkebb, azt elemzik, hogy Keynes gondolatai a befektetői döntések megalapozottságáról (amelyek a gazdaság működésének döntően meghatározó elemei) hagytak-e nyomot a mai közgazdaságtanban, ahol egyre gyakrabban olvashatunk a „racionális várakozásokról”. Ilyesmikben Keynes nemigen hitt. Vélekedése szerint a befektetők gyakran csak egymást majmolják.

---

7 Ez utóbbi áll legközelebb a (BD) cikk alcímében szereplő logikai valószínűség fogalmához.

8 Ezen a ponton talán érdemes felidézni az 1970-es évek Magyarországán népszerű viccet: találnak egy múmiát Egyiptomban. Hívják az angol tudósokat, akik megállapítják, hogy a múmia életkora 3200 és 3600 év közé tehető. Aztán hívják az amerikaikat, akik korszerűbb eszközökkel megállapítják, hogy 3300 és 3500 év közé esik a kora. Végül hívják a szovjet tudósokat, akik 3 nap múlva közlik, hogy a múmia pontos életkora 3412 év, 3 hónap és 5 nap. Mindenki elhűl, de valaki azért megkérdi, hogy ezt honnan lehet tudni. A klasszikus válasz: „Bevallotta.”

9 *Laplace* nyakába szokták akasztani a determinisztikus világkép bajnoka címkét, holott valószínű, hogy ha ma élne, nem fogalmazna úgy, ahogy tette azokban a mondatokban, amelyeket lépten-nyomon idéznek tőle. Akkoriban vált komoly arzenállá (nem kis részben az ő munkássága nyomán) a differenciálegyenletek eszköztára, és oldottak meg olyan problémákat, amelyekre korábban esély sem volt. Ez volt a kor gőzgépe, antibiotikuma, atombombája. Nem csodálható, hogy lelkes volt, eljött egy új kor hajnala, csak jól kell csinálni…

A (BD) tanulmány nem könnyű olvasmány, miközben újfent alapvető kérdésekre hívja fel a figyelmet. És manapság nem a filozófusok[10] válasza a perdöntő, hanem sokkal inkább a bankároké, hiszen az ő kezükben van nagyon sok pénz sorsa. Miben hisznek, amikor a számok alapján döntenek? Remélhetőleg nem csak abban, hogy mindezt a számítógép adta ki milliónyi adatot feldolgozva. Van-e biztos támpont, vagy legalább kellően bizonyossá tehető támpont a bizonytalansággal teli döntési helyzetekben?

Luca Pacioli

Keresve se találhatnánk jobb kiindulópontot szellemi kalandozásunkhoz, mint a következő feladványt.[11] Ketten játszanak fej vagy írást. Ha fej jön ki, az egyik nyer, ha írás, akkor a másik. Az nyeri az induláskor kettejük által összeadott pénzt, aki először éri el a 6 győzelmet. A játék 5:3-as állásnál félbeszakad. Hogyan kell méltányosan felosztani az összeget?

A feladat már Luca Pacioli 1494-ben megjelent „*Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalità*"[12] című könyvében is szerepel. Luca Pacioli ferences szerzetes volt, *Leonardo da Vinci* kortársa és időnkénti munkatársa, ő a kettős könyvelés megalkotója, és ezáltal a számvitel atyja.

A Pacioli által megadott megoldás (5/8, illetve 3/8) tökéletesen megfelelt az ő múltbeli tényeken alapuló, számviteles világszemléletének. Ám a megoldás rossz. 150 évvel később *De Méré* lovag vetette fel ugyanezt a kérdést *Blaise Pascalnak*, aki Fermat-val való levelezése során megoldotta ezt a problémát (7/8, 1/8), mellesleg megalkotva a várható érték fogalmát.[13]

Pacioli a *múltbeli tényeket* vette figyelembe. A Pascal által megtalált helyes megoldás abból indult ki, hogy milyen várható nyereményekre tehetne szert az adott

10 Egyébként, hol is vannak ők napjainkban? Nem is oly régen még minden egyetemen volt ilyen nevű tantárgy.

11 E feladványt és a hozzáfűzött pár sor megjegyzést a téma fontossága miatt leírtam a GéP tavalyi számában a Bankszövetség 30. évfordulójának tiszteletére összeállított kötetben is, l. Száz János (2019): Fejlődés és kockázat. Pénzügyi közvetítés a C64 idején és ma. *Gazdaság és Pénzügy* 6(1), 66.

12 (lat.) Az aritmetika, a geometria, az arányok és arányosságok summázata (Velence, 1494).

13 Elképesztő, hogy a dolgok ily szépen összekapcsolódjanak egy egyszerű, de nagyon szép régi feladat kapcsán. Személyek is, és a világ eme kettőssége, amely szerintem alapvető filozófiai szerepet játszik a mai pénzügyi piacok megítélésében. Hiszen az, hogy milyen szemmel nézünk e piacokra, nem elválasztható attól, hogy végül is mit látunk ott.
Ebből a szempontból nézve, a valószínűségszámítás oktatása legalább olyan fontos, mint a nagy adattömegek mechanikus vizsgálatára való felkészítés. Persze nem szükségszerű, hogy e kettő kizárja egymást.

állásnál a két fél egy esetleges folytatásnál.[14] Pontosan itt van ma az egyre mélyebbé és szélesebbé váló szakadék a *jövőbeni lehetőségeket* vizsgáló kockázatelemzők és az elsősorban *múltbeli tények*re összpontosító számvitel és jog között. Talán ennek a nyomásnak engedve jelent meg a számvitelben mostanában a klasszikus számviteltől távol álló piaci érték fogalma. A jogszabályokban is egyre gyakrabban kerülnek elő valószínűségszámítási fogalmak.[15]

Mibe kapaszkodhatunk, miben bízhatunk jobban? A mögöttünk levő, biztosnak tűnő, megvalósult múltban vagy a bizonytalan jövőben? Mindenesetre fontos, hogy úgy tekintsünk a múltra is, amint azt az *Illésék* énekelték az 1960-as évek végén: „*Lehetett volna más is talán, lehetett volna, mégse az lett…*"

A Benthamite-kalkuláció

A (BD) tanulmány szerint „*Keynes nem hitt abban, hogy a vállalkozók készítenek egy listát, ami* ***tartalmazza az összes lehetséges jövőbeni kimenetet****, valószínűséget illesztve a lista minden egyes tagjához, s utána számítani várható értéket. A vállalkozók nem formálhatják a hosszú távú értékek ún. Benthamite-kalkulációját (Bentham, 1789). Keynes azt mondja, hogy* »létező tudásunk nem szolgáltat elégséges bázist a számított matematikai várakozásokhoz« (*Keynes*, 1936:152)."

Ennek a bizonyos elvi listának a léte vagy nem léte (lásd ugyanabban a lapszámban *Juhász Péter* írását a forgatókönyv-elemzésről[16]) szervesen kapcsolódik az 1990-es évek Nobel-díjakkal jutalmazott sikertémájához: a származtatott termékek (opciók, swapok stb) helyes árazásához. Sokan tartják ezen termékek némely egzotikus változatát mérgező termékeknek, hiszen a pénzügyi válságok kialakulásában, terjedésében komoly szerepet tudnak játszani két okból is. Egyrészt a bennük rejlő igen magas tőkeáttétel miatt, főként pedig azért, mert a bennük levő kockázat igazi jellege a bonyolultabb esetekben teljesen rejtve marad nemcsak a számviteli elemzők számára (azok a bizonyos vonal alatti tételek), de a szakembernek tekintett pénzügyi elemzők számára is. Ami a legrosszabb: akár az ügyletben részt vevő mindkét fél számára és az azt felügyelő szervezet számára is.

14 A számpéldánkban a játék az esetleges folytatásnál legfeljebb 3 lépésben véget érne. A hátrányos helyzetű játékos csak akkor nyerhet, ha mind a háromszor ő nyer, ellenkező estben társa célba ért. Annak az esélye, hogy mind a három alkalommal ő nyerjen, $1/2^3 = 1/8$, így a társa 7/8 eséllyel nyer. Az eredeti feladat általánosabban volt megfogalmazva. Nem akartam túlságosan visszaélni az olvasó figyelmével és türelmével, innen az egyszerűsített számpélda. A pontos részletekért be kell írni a Google-ba: **„*Problem of points*".**

15 Sajnos éppen ezekben az években tűnt el az önálló valószínűségszámítás-oktatás a hazai közgazdasági felsőoktatásból.

16 Juhász Péter (2020): Kockázatelemzés a vállalati pénzügyi modellezésben. *Gazdaság és Pénzügy* 7(1), 48–56.

Az AD-modell és a konzisztens árazás kritériuma

A származtatott termékek ellentmondásmentes árazásának alapelvét a Nobel-díjas szerzőpáros, *Arrow–Debreu* (AD) modelljéből lehet a legegyszerűbben és áttekinthetően megérteni. Az egyperiódusos modellben a sorokban felsorolásra kerülnek a tekintetbe vett pénzügyi termékek, az oszlopokban e termékek értékei, attól függően, hogy melyik lehetséges állapot következett be.

Például a *Black–Scholes–Merton*-modell (amelyben van egy kockázatmentes, egy kockázatos és egy származtatott kockázatú termék, például betét, részvény, opció) az AD elrendezésben[17]:

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ S \\ g = ? \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} B & B \\ Su & Sd \\ g_u & g_d \end{bmatrix}$$

Ebben az esetben az árfolyam vagy felmegy (u), vagy le (d). Attól lesz származtatott termék a g, hogy ugyanakkor megy fel, mint az alaptermék (S).

Általános esetben a V mátrix $m \times n$-es, és rangja és rendje alapján beszélnek teljes piacról avagy épp *incomplete market*ről.

A matematikai részleteket mellőzve, az AD fő üzenete: konzisztens (arbitrázsmentes) árazásról akkor beszélhetünk, ha az állapotok (oszlopok) *súlyozása minden terméknél ugyanaz*, és minden termék lejáratkori várható értékét ugyanazzal a diszkontrátával diszkontáljuk.[18] E modellben nincs semmiféle statisztika vagy sztochasztika, van viszont teljes felsorolása az összes lehetséges változatnak.

A (BD) tanulmány több helyen is hivatkozik Arrow-ra, akinek viszont az egyik legtöbbet idézett modelljében épp ez a *teljes felsorolás* a kiindulópont. Az opcióárazási alkalmazásban a lineáris algebrai kimenetsúlyozás fogalmazódik át valószínűségi nyelvezetre, hogy innentől a valószínűségszámítás teljes fegyvertára (várható érték, szórás, feltételes valószínűségek) alkalmazható legyen. Csak egy lineáris algebrai konzisztenciakritériumot (replikálhatóságot) fogalmaztunk át valószínűségszámítási nyelvezetre. Semmi statisztika, mintavétel vagy a döntéshozó korlátozott ismerete. Egy többtényezős szerkezet belső logikai viszonya fogalmazódott át a valószínűségek nyelvére.

17 Részletesebben l. Száz János (2019): *Kvantitatív pénzügyek,* 5.1 fejezet. Budapest: Nemzetközi Bankárképző Központ, 143–151.

18 Az alapelv ugyanaz, mint a sarki boltban: minden bevásárlókosár tartalmát ugyanazon termékárlista alapján kell árazni konzisztens árazásnál.

Ha valami, akkor ez igazán rokonítható a Keynes-féle logikai valószínűség fogalmával, és semmiféle relatív gyakoriság nincs benne. Amit a gyakoriságok alapján mondanánk egy opciólehívás valószínűségéről, azt a szakirodalom *P* mértéknek mondja; ami például az *AD* modellből jön ki, azt *Q* mértéknek szokás nevezni. Az előbbit „*objektív*" mértéknek, utóbbit „*martingál*" mértéknek nevezik. Az előbbi alapján egy átlagos amerikai részvény átlagos hozama hosszú távon 12%, az utóbbi alapján 4%. Elég szembeötlő különbség. A két megközelítés jól megfér egymás mellett: előbbit használjuk a portfólióelméletben a hozam és kockázat számításához, utóbbit például egy opció arbitrázsmentes árazásához. A *Q* súlyozás nemcsak más értékeket rendel a részvény árfolyamváltozásaihoz, de végül is oda vezet igen kontraintuitív módon, felrúgva az a priori elképzeléseinket, hogy ha két részvénynek azonos a volatilitása, de az egyik az utóbbi időben emelkedő trenddel rendelkezett, a másik pedig csökkenővel, akkor bizony a *Q* mértékkel (konzisztensen) súlyozva a kimeneteket, a két opció értéke azonos.[19] Hát tényleg nem erre számítanánk…

Az elvárt hozam

A (BD) tanulmány szerint „*A valószínűség szerepének vizsgálatával kapcsolatos legnagyobb probléma, hogy nem létezik a valószínűség fogalmának olyan explicit és átfogó definíciója, amely az összes tudományágra általánosan vonatkoztatható lenne.*"[20] Ez mélységesen igaz, de szerintem nem probléma. Szorítkozzunk a pénzügyekre. Az egyik szegletben halálpontosan definiált eloszlások gondosan becsült paramétereivel dolgozunk (derivatívaárazás), a másikban az adatok tökéletes hiánya miatt az elvárt hozam tölti be implicit módon a kockázat mérőszámának szerepét (induló cégek elképzelt cash flow-jainak diszkontálása a hasonló helyzetűnek ítélt cégek elvárt hozamának alkalmazásakor). Anélkül akár, hogy felmerülne egy naiv piaci szereplőben, hogy ő itt lehetséges kimeneteket mérlegelt volna.

A CAPM innen nézve nem más, mint kísérlet a logikai valószínűség és a gyakorisági valószínűség közötti rejtett kapcsolat érzékeltetésére. A Black–Scholes-képlet fordított alkalmazásával, a visszaszámított volatilitás (implied volatility) számolásakor azt kalkuláljuk visszafelé, hogy milyen becsült volatilitás mellett jönne ki a piacon megfigyelt opciós ár, azaz a következő időszakra öntudatlanul mekkora volatilitást várnak a piaci szereplők (akik a pénzüket teszik fel erre a véleményükre). A CAPM-et is használhatjuk visszafelé: milyen *implicit bétát* tételezünk fel a konkrét cégre, ha ezt vagy azt a diszkontrátát alkalmazzuk a vállalatértékelés során.

19 Persze az egyéb paramétereket azonosnak tekintve.

20 I. m. 5. o.

Véleményem szerint túl ambíciózus elvárás egy az *„összes tudományágra általánosan vonatkoztatható valószínűségfogalom”* kívánalma. A valószínűségszámítás is csak egyfajta eszköz. Néha kalapácsra, néha harapófogóra van szükség. Máskor meg nem a harapófogóra, hanem a csavarhúzóra. Ha létezne is mindenre használható definíció, egy ilyen *„tudományos svájci bicska”* lehet, hogy túl absztrakt, és meglehetősen semmitmondó lenne az alkalmazásokhoz.[21]

A deriválás és integrálás „feltalálása” az egyik legnagyobb hatású áttörés a tudomány történetében.[22] De tényleg folytonosak-e azok az összefüggések, amelyekre alkalmazzuk e célszerszámokat? A keresleti és kínálati görbe tényleg folytonos, ami által garantált, hogy a kettő valamilyen árnál csak találkozik?[23] A pénzügyekben többnyire nem folytonos dolgokat tekintünk annak. Bizonyosan nem létezik folytonos tőkésítés, és az árfolyamokat, kamatlábakat határozottan véges számú tizedesre jegyzik. Szóval ízlés és célszerűség dolga, mikor használunk diszkrét és mikor folytonos modellt. Ehhez hasonlóan, mikor tekinthető determinisztikusnak vagy sztochasztikusnak (és ez utóbbin belül milyen értelemben) egy szituáció. A legszebb példa erre a Feynman–Kac-formula, amikor egy determinisztikus parciális differenciálegyenlet megoldásához nyújthat segítséget a probléma feltételes várhatóérték-folyamatként való megközelítése. Vagy egy jóval egyszerűbb példánál maradva: amikor a π becslését Monte-Carlo-szimulációval végezzük véletlen számok segítségével.

Valószínűség, esély, relatív súlyok

Továbbra is arra a következtetésre hajlom, hogy „nincs igazi értelmezése a valószínűségfogalom közgazdasági, pénzügyi felhasználásainak. Nem egyik vagy másik az adekvát, hanem

- hol a statisztikai adatokra megbízhatóan építő *relatív gyakoriság*,
- hol a majdnem vaktában történő *esélylatolgatás*[24],
- a derivatív termékek árazásakor pedig egy *konzisztens súlyozási* kritérium.

21 A négyzetes mátrixoknál értelmezünk egy sor fogalmat (determináns, inverz, sajátérték, etc.), az általános méretű mátrixokról (pl $m \times n = 3 \times 125$-ös méretű mátrixok) vajmi keveset tudunk megfogalmazni.

22 Ne feledjük, a kezdetek *Archimédészig* nyúlnak vissza.

23 Garantált, hogy a szőlőkapálás kereslet-kínálati függvénye nem ilyen a Balaton-felvidéken.

24 Vajon a kétfelé ágazó erdei ösvények közül melyik végén van a turistaház? Nem kell hozzá *Laplace* démona, elég lenne egy térkép, mert az egyik végén biztosan ott van, a másik végén biztosan nincs. Még csak nem is az a helyzet, hogy hol itt van, hol ott van. Erre a helyzetre használni a valószínűség szót, ez csak elkoptatása a fogalomnak.

A teendőnk, hogy világos szóhasználattal különböztessük meg, hogy mire is gondolunk."[25]

Kahnemann

A (BD) tanulmány olvasói között bizonyára akadnak, akiknek két további dolog jut még eszébe ennek kapcsán:

- a *fuzzyhalmazok*,[26]
- a közgazdasági Nobel-díjas pszichológus Kahnemann „*Gyors és lassú gondolkodás*" című könyve[27] arról, hogy miként is működik valójában az agyunk, szemben azzal, hogy korábban mit is gondolkodtak arról, milyen is lenne logikusan a racionális gondolkodás.

Mi is rejlik a kötvények bizonytalan kamatlábak melletti árazása mögött?

Feltételezett(!) valószínűségek, amelyeknek csak egy vékonyka statisztikai kapcsolata van a valósággal (akár jól ismerjük azt, akár nem), nevezetesen: a lehetséges kamatlábakat úgy kell súlyozni a számítások során, hogy a *szórásuk* megegyezzen a piacon megfigyelt kamatláb-volatilitással. Ezen túl csak egy induló hozamgörbe szükségeltetik. Semmi más. A változások (részlépések) várható értéke a hozamgörbe alakjából adódik (azáltal, hogy a trinomiális kamatlábfán a faközepet ennek megfelelően kalibráljuk a diszkrét megközelítésben). Amit elvétünk a kimenet súlyozásánál, azt a diszkontálásnál tesszük jóvá. Itt is csupán *konzisztenciakritériumnak* tesz eleget az azonos átmenet-valószínűségek használata. Nem kell ismernünk azokat, tág határok között magunk választhatjuk meg nagyságukat aszerint, milyen termék áralakulását tekintjük viszonyítási alapnak (l. a *forward mértékek* használata a sztochasztikus kamatlábak melletti kötvényárazásban).[28]

25 Száz János: Valószínűség, esély, relatív súlyok. Opciók és reálopciók. *Hitelintézeti Szemle* 10(4), 336–348.

26 Bárdossy György – Fodor János (2011): Matematikai módszerek alkalmazása a földtudományokban. *Magyar Tudomány,* 6. (http://www.matud.iif.hu/2011/06/09.htm).

27 Daniel Kahnemann (2013): *Gyors és lassú gondolkodás* (ford. Bányász Réka, Garai Attila). Budapest: HVG Könyvek.

28 Részletesebben l. Száz János (2019): *Kvantitatív pénzügyek,* 10.2 fejezet. Budapest: Nemzetközi Bankárképző Központ, 302–303.

Két záró megjegyzés

1. Ha a BD-cikk egyik rejtett üzenete az, hogy a legkorszerűbb ökonometriai módszerek, bonyolult valószínűségszámítási arzenál páncélja mögött gyakran csak az alulinformáltságunk (magyarul tudatlanságunk), azaz bizonytalanság rejlik és csak látszat a számszerűsíthető kockázat, akkor ezzel nem tudok nem egyetérteni. De azt se felejtsük el, hogy nem kis részben a mai publikációs kényszerek miatt kap díszes (gyakran matematikával jól átszőtt) köntöst a néhol szegényecske mondandó. Amiként az üzleti életben is jó fedezéket nyújt a felelősség elől egy nagy adatbázisra alapozott, komoly szoftver által adott eredmény.

2. A COVID-19 bizonyos szempontból újraértelmezi mind a tömegeknek, mind a jognak a valószínűség fogalmához való viszonyát. A szokásos joggyakorlat alapján *hiába lehet szinte teljes bizonyossággal* tudni, hogy X megölte Y-t (ott a felvétel), de ha nem bizonyítják szép szabályosan (egy kicsit elmosódott a felvétel, vagy illegálisan készült), akkor X akár még meg is úszhatja. Mindenki tanult statisztikából a hipotézisvizsgálat elsőfajú és másodfajú hibájáról.

A mostani rendkívüli helyzetben mostanság kb. $p = 112/10^6$ a valószínűsége annak, hogy valaki fertőző, és a számok alapján egy fertőzött kb 2-3 embernek adja át a vírust, miközben százaknak/ezreknek ment a közelébe, tehát az a q valószínűség, hogy a velem szemben álló ember megfertőz, jóval kisebb mint a p, pedig már az is elég kicsi a járvány elején. Hiába pici a q, mégis az emberek tömegeit lehet alapvetően korlátozni. Egyik percről a másikra.

> Hirtelen elfogadott lett, hogy egy francia ember ezereurós büntetést kaphasson azért, mert csak úgy lement a vidéki nyaralójába. (Pedig ezred százalékokban fejezhető ki annak az esélye jelen pillanatban, hogy fertőz vagy megfertőződik.) Ha csak 1-2 embert korlátoznának a lakhely elhagyásban, és azzal az indokkal, hogy az illető csaló vagy gyilkos, akkor hiába lenne 80-90% az esélye annak, hogy bűnös, mégis jogi procedúra, felháborodás lenne belőle.

Döntő mozzanat, hogy most a *jövőről* és *nagy tömegekről* van szó. A Pacioli-féle osztozkodási problémában most valahogy mindenki ráérez, hogy a 7/8–1/8 osztozkodás a jó, és nem a múltbeli tények alapján történő 5/8–3/8 arányú. Miért van az, hogy emberek milliói és különböző pártok hirtelen nagyjából egyetértenek abban, hogy korlátozni kell az emberek mozgását ?

Egy szabad szemmel alig látható valószínűségű esemény kapcsán. Ugyanakkor még most is oda-vissza rengeteg a kétely, hogy O. J. Simpson gyilkolt-e annak idején. A válasz talán abban rejlik, hogy ***hirtelen sokan mások is*** elkezdtek hinni abban a valószínűségben, hogy ha nem teszünk semmit, akkor P valószínűséggel heteken belül a lakosság fele megbetegszik, és ennek 3-4 százaléka meghal.

Én magam is 3 hete még azt terveztem, hogy elmegyünk a korábban befizetett síelésre Dél-Tirolba, hisz Dél-Tirol nem Lombardia, és csak egy békediktátum következménye, hogy nem (az akkor még biztonságosnak hitt) Ausztria.

Most már az ember kétszer is meggondolja, hogy lemenjen-e a sarki boltba.

Közben nem a valószínűségek változtak meg lényegesen, hanem az értelmezésük.

Az új járvány ugyanakkor alátámasztja Kahnemannak az a megfigyelését is, hogy mennyire nem tudja agyunk automatikus fele jól értelmezni a nagyon kicsi valószínűségek közötti eltéréseket. Azt, hogy mi a különbség a $8/10^6$ és a $388/10^6$ valószínűségek között. Mi is?

Ezek a csöppnyi valószínűségek nem izgatták volna fel a közvéleményt. A ***várható érték*** igen. Mivel itt most tényleg tömegjelenségről van szó, nagyon nagy a vetítési alap. Az 5 ezer halott Olaszországban már egy értelmezhető szám. A közeljövőben várható további 10 ezer pedig ijesztő.

Valószínűségszámítási nyelvezettel leírva a járványügyi szabályokat és ajánlásokat, azt mondhatjuk, hogy a kijárás korlátozása nem más, mint a Bernoulli-kísérletsorozat elemszámának (n) drasztikus csökkentése, amelyben minden személyes kontaktusban q valószínűséggel elkapjuk a vírust. A kétméteres távolságtartási ajánlás pedig magát a q-t kívánja csökkenteni.

A vita tárgyául szolgáló valószínűség-értelmezési probléma szempontjából további fontos tényre világít rá élesen a mostani járvány: maguk a *valószínűségek is* jelentősen *változnak* az időben. Tehát nem valószínűségi változókról, hanem sztochasztikus folyamatokról van szó, időben változó paraméterekkel. Azaz többnyire jóval bonyolultabb a helyzet, mint hogy valamely jól körülhatárolt valószínűséget kellene jól megbecsülni és helyesen értelmezni. A szóban forgó valószínűség tehát nem egy szám, hanem egy függvény. Még csak az sem biztos, hogy determinisztikus függvény (l. például a sztochasztikus volatilitás modelleket, ahol még a bizonytalanság mértéke is bizonytalan.)

A tőzsdei életben mindennapos, hogy az áremelkedésbe vetett hit megnöveli a vásárlást és ezáltal az emelkedés valószínűségét is, ami tovább növeli a vásárlást, és ebből a spirálból jön a buborék. A valószínűségekbe vetett *kollektív* hit tehát visszahat magukra a valószínűségekre.

Ez az, amiben a mostani járvány esetén is remélhetőleg bízhatunk. Tehát egyáltalán nem mellékes, hogy mit is gondolunk a valószínűségekről és értelmezésükről.